УДК 621.397;621.391.883.2

ФРАКТАЛЬНОСТЬ ОТНОШЕНИЯ СИГНАЛ/ШУМ

С.М. Слободян

Инновационный центр «ТЕСТ», г. Томск
E-mail: IC_Test@ inbox.ru

Обсуждается классическое определение отношения сигнала к шуму, обычно используемое для количественной оценки эффективности различения сигналов в оптимальном линейном фильтре. Введено понятие фрактальной размерности отношения сигнал/шум для использования в качестве параметра обнаружения объекта в оптико-электронных и телевизионных автоматических системах и средствах контроля и диагностики состояния пространства наблюдения.

В большинстве задач, решаемых в измерительной технике, радиолокации, астрономии, оптической связи, локации, навигации, телевизионной автоматике и многих других весьма широких областях науки и техники, одной из основных и сложных проблем является проблема помехоустойчивости устройств, систем и комплексов [1–12]. Другими словами, решение задачи отыскания наилучшего из способов распознавания сигналов и объектов при наличии шума или помех. В определение «наилучший» способ или метод часто вкладывают синоним «оптимальный» в том или ином смысле подход к обработке сигнала или распознаванию изображения объекта в условиях воздействия помех. Определение наилучшего производится на основе выбранного критерия оптимальности, в большей или меньшей степени соответствующего пониманию разработчиком принципа оценки качества решения данной задачи, которые весьма широки и разнообразны.

Так, например, в оптической и радиолокации требуется установить параметры (x, y, z – координаты объекта, скорость и т. п.) путем облучения этого объекта некоторым видом излучения с последующим приемом отраженной от него энергии этого вида излучения или (при пассивной локации) естественного вида излучения (теплового, солнечного или другого вида электромагнитного излучения). В оптической и радиоастрономии полезным сигналом является собственное излучение наблюдаемого небесного тела. Характеристики сигнала с полезной информацией заданы естественным образом самой природой, и измерительные или регистрирующие средства изменять его или подвергать активному воздействию наблюдаемый объект не могут. В оптико-электронных, телевизионных и радиоизмерительных средствах задача также сводится к измерению параметров или характеристик сигналов по отличительным их признакам при наличии помех.

Наилучшие средства и методы отыскиваются по достижению наибольшего значения количественного критерия, одним из которых часто служит наилучшее (наибольшее значение) отношение сигнала к шуму [1, 2]. Отношение сигнала к шуму как критерий оценки является здесь отношением двух энергетически однородных величин и представляет собой некоторое число, получающееся в результате измерения или количественной оценки первой величины, в рассматриваемой ситуации – искомого сигнала – числителя, когда вторая, в данном случае помеха или шумовая составляющая, выбрана за единицу меры. Для корректной оценки значений, принимаемых отношением сигнал/шум, обе величины, количественно отражающие величину энергии той и другой составляющей в суммарном значении отсчета текущей выборки, должны быть измерены одной и той же мерой равнозначности. Только тогда отношение сигнал/шум будет точно отражать соотношение между сигналом и уровнем шума в данной выборке.

Теории оптимальных методов приема сигналов и обработки изображений предшествовало создание теории оптимальной фильтрации, основанной на применении количественного критерия, а именно, критерия достижения максимального отношения пикового значения амплитуды (напряжения, тока и т. п.) сигнала к среднему квадратичному значению уровня (напряжения, тока и т. п.) шума. Достижение максимального значения отношения сигнала к шуму любым возможным вариантом вариации параметров схем обработки и фильтрации полезного сообщения и определяет степень оптимальности данной схемы, элемента, устройства или системы.

Этот подход применялся в самых ранних системах. Он обеспечивает достаточно хорошие результаты в оценке систем и используется до сих пор в новейших разработках, что и определяет необходимость настоящего обсуждения, чтобы иметь ясное представление о свойствах и возможностях модификации этого подхода.

Действительно, величина отношения сигнала к шуму до настоящего времени остается одним из основных фундаментальных критериев оценки качества элементов, схем, устройств и систем во многих областях приборостроения. Оно служит базовым параметром оценки качества сложных систем и комплексов в современных теориях статистических решений, обнаружения и оценок. Отношение сигнал/шум как энергетический параметр, хотя и в относительных единицах меры, отражает характер относительного расположения двух сопоставляемых для сравнения элементов определенной системы «сигнал/помеха» или «сигнал/шум» и определения их взаимозависимости.

Основываясь на принципах логики, не обязательно математической, нетрудно показать, что любое отношение двух величин, в том числе и отношение сигнал/шум, определяет разбиение множества (области возможных значений принимаемых этим отношением), на котором оно определено, на непересекающиеся классы, так называемые классы эквивалентности. Элементы множества суть фрагменты области принимаемых значений, связанные данным отношением, попадают в общий класс; не связанные – в различные. Тогда элементы множества, попавшие по связности отличительных признаков в общий класс, в известном энергетическом смысле, неразличимы. Это и определяет важность не только высокой точности оценки значений «энергетического» отношения сигнал/шум, но и поиск других подходов и мер более точных оценок различения двух смежных классов множества, в данном случае, сигнала и шума.

Стремление к практике идеального приема сигналов и изображений в условиях воздействия шума и помех основывается на простых и глубоких идеях, изложенных в наиболее последовательной и ясной форме Ф.М. Вудвордом. Следуя этой идее, задачей идеального устройства, на вход которого поступает смесь сигнала с шумом, является более полное разрушение ненужной информации, содержащейся в смеси, и сохранение полезной информации о тех параметрах сигнала, которые представляют интерес для пользователя измерительного или автоматического средства, например, телевизионной автоматической системы (ТАС) [6].

Выходом идеальной системы обработки сигнала изображения является распределение вероятностей возможных значений измеряемых параметров, вычисленное на основании принятой реализации смеси и статистических данных о сигнале изображения и шуме, известных лишь априори. Однако, амплитуда, интенсивность и другие отличительные параметры сигнала изображения не всегда достоверно известны для ТАС.

Чаще всего, прием излучения от объекта и обработку сигнала изображения приходится выполнять системе, когда совсем нет априорных сведений о многих параметрах, например, интенсивности принимаемого сигнала изображения. В этом случае её приходится считать произвольной. Тогда исход работы ТАС и операции обработки, получаемого ею, массива данных о пространстве и поле изображения определяется истинной выборкой, полученной на момент регистрации, интенсивности сигнала изображения. ТАС остается правильно интерпретировать результат проведенных вычислений и принять однозначное решение о степени достоверности величины каждого измеренного параметра. При наличии шума принятое решение ТАС лишь случайно (с определенной степенью вероятности) может оказаться правильным. Правило, которым руководствуется ТАС, принимая решение, определяется величиной и характером допустимых ошибок, установленных для системы её разработчиком.

Показатели качества, используемые в автоматических средствах контроля и анализа состояния пространства наблюдения, различных методов об-

наружения объектов на фоне стохастических помех, определяются численными значениями вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения. Как количественные характеристики, функционально связанные со структурными особенностями конкретной системы и условиями её работы, они зависят от отношения сигнала к шуму, являющегося параметром обнаружения, и ряда энергетических и неэнергетических параметров ТАС контроля пространства наблюдения [1–3].

Оптимизация параметров (например, размеров, формы и ориентации элемента, скорости и типа траекторий сканирования и т. п.) систем, проводимая с учетом функциональных особенностей их влияния на статистическую эффективность обнаружения, позволяет осуществлять рациональный выбор и синтез методов и алгоритмов, обеспечивающих наименьшую из возможных изменчивость характеристик телевизионных автоматических систем при отклонениях распределения помех и воздействий от номинальных значений, предварительно задаваемых при проектировании. Это обеспечивает большую устойчивость их функционирования в условиях действия хаоса турбулентного, нелинейного и других видов факторов влияния на работу автоматического средства, комплексов и систем. Можно говорить о том, что оптимизация параметров повысит устойчивость (робастность) автоматических телевизионных средств наблюдения пространства при изменении условий функционирования.

Границу надежной работы автоматических средств в режиме слежения за измеряемым параметром принято [1, 2, 6, 9–12] оценивать величиной порогового значения отношения сигнала к шуму. За пороговое значение отношения сигнала к шуму принимается такое, при котором ошибка сопровождения изменения параметра, вызванного шумом, становится равной максимально возможному или максимально допустимому значению без нарушения режима нормального функционирования системы.

Если следовать К.В. Михалкову [6], то отношение сигнал/шум в измерительных средствах и следящих системах телевизионной автоматики (в настоящей статье – ТАС) определяется отношением тока (или напряжения) сигнала, как правило его максимального значения, к среднеквадратическому значению тока (или напряжения) шума на уровне фона в заданной полосе частот фильтрации сигнала на входе схемы, регистрирующей наличие сигнала. Обычно, ввиду малости амплитуд сигнала и шума, а в режиме счета фотонов – низкой интенсивности регистрируемых потоков фотоэлектронных импульсов от излучения падающего на фоточувствительную поверхность приемника изображения, между входом регистрирующей и выходом приемника изображения устанавливается усилитель сигнала (видеоусилитель) с требуемым коэффициентом усиления по току (или напряжению).

Максимальное потенциально возможное отношение сигнал/шум при гауссовом шуме [1–6] соответствует условиям обнаружения малоконтрастного объекта на значительном (по интенсивности излучения или освещенности) внешнем фоне пространства наблюдения объекта:

$$\Psi_m = \sqrt{Э / N_ш} = \sqrt{N_ш^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} I_C(x, y, t) dt}, \qquad (1)$$

где $Э$ – энергия сигнала; x и y – координаты изображения объекта в плоскости приемника; t – время и $N_ш = N_0/2$ – интенсивность шума (для гауссова стационарного) на входе усилителя прямо пропорциональна величине определяемой свойствами распределения освещенности изображения объекта и текстуры фона, особенностями, используемого в системе, приемника изображения и размерами его элемента [1, 6, 10–12]. В тех приемниках изображения, где дисперсия шумового тока не зависит (или даже при сильных световых потоках зависимость пренебрежимо мала) от уровня фона и темнового тока, шумовой процесс изменения тока относится к классу стационарного случайного процесса. В ряде приемников изображения [10], например, фотоэлектронный умножитель, диссектор и т. п., шум приемника изображения, в общем случае, – нестационарный случайный процесс. Другими словами, он является сложной функцией величины тока сигнала приемника изображения, зависящего от потока излучения, освещающего его фоточувствительную поверхность.

Следует заметить, что вышеприведенное выражение лежит в основе – как базовое – одного из важных показателей качества любого измерительного автоматического и неавтоматического средства или системы обработки сигналов, которым является чувствительность средства к минимально значимым или пороговым информационным сигналам. Под чувствительностью измерительного средства понимается его способность принимать или регистрировать (т. е. идентифицировать) слабые по величине или интенсивности (или по другому параметру в зависимости от вида информационной идентификации признака) сигналы и количественный критерий этой способности.

В простейших устройствах чувствительность определяется минимальным уровнем сигнала (или другого информационного параметра, например, угла прихода излучения) на входе измерительного средства, при котором содержащаяся в сигнале полезная информация еще может быть идентифицирована (воспроизведена, обнаружена, измерена) с необходимой оценкой качества (точностью определения угла, амплитуды сигнала, контраста изображения).

В сложных прецизионных, тем более, автоматических средствах измерения величина (интенсивность и т. п.) полезного сигнала часто оказывается сравнимой с величиной (уровнем, интенсивно-

стью) действующих одновременно с этими сигналами на входе устройства внешними помехами, искажающими полезный сигнал и затрудняющих его распознавание и идентификацию. В этом случае, предельной чувствительностью средства (системы, устройства, схемы) называется чувствительность, ограниченная помехами. Она является параметром автоматической системы и функционально зависима от внешних факторов.

При благоприятных условиях внешние помехи слабы, и основным фактором, ограничивающим чувствительность системы, становятся внутренние источники шума. Последние в нормальных условиях работы имеют постоянный уровень, поэтому чувствительность, ограниченная внутренними шумами – вполне определённый параметр, оцениваемый величиной, обратной значению отношения сигнала к шуму. Чем больше пороговое отношение сигнала к шуму, тем хуже чувствительность. За меру чувствительности, в этом случае, часто принимают непосредственно уровень внутрисистемного шума, что тождественно отношению сигнала к шуму, равного единице. В любом случае, чувствительность системы это её свойство, выражаемое отношением изменения сигнала на выходе устройства к вызвавшему его изменению на входе и ограничиваемое отношением сигнала к шуму (т. е. уровнем шума в системе или на ее входе).

Прежде чем перейти к обсуждению фрактальности параметра обнаружения, отметим, что выражение (1) для отношения сигнал/шум получено [6] статистическим методом в приближении стационарности флуктуационных шумовых процессов и гауссова характера их распределения. Его применение в ТАС дало возможность решать самые разнообразные задачи, связанные с оценкой характеристик синтезируемых структур и эффективности различных алгоритмов их функционирования. Однако, надо четко понимать, что статистические методы, помогая решать широкий спектр задач, представляют иногда, например, для оптимизации реальных физически осуществляемых схематизированных алгоритмов функционирования или определения и оценки равновероятных и взаимоисключающих событий «хаоса» и «порядка», значительные и принципиальные трудности.

Из формулы (1) видно, что влияние пространственной и временной неравномерности чувствительности приемника изображения и текстуры распределения фона, спроецированных на его фоточувствительную поверхность, при конечном времени анализа ($\tau_a \ll \infty$), характерно для получаемых реализаций выходного сигнала приемника как временного ряда наблюдений телевизионной автоматической системой. Эти факторы приводят к вариациям по полю изображения значений числителя и/или знаменателя, а значит и величины отношения сигнал/шум при переборе элементов и данных выборки наблюдения.

Практический вид выходного сигнала приемника изображения для малоконтрастных изображений имеет типично изрезанный фрактальный характер, как для стационарных, так и нестационарных распределений сигнала и шума. При фрактальном характере числителя и/или знаменателя соотношения (1) справедливо говорить о фрактальной обусловленности величины отношения сигнал/шум (частное от деления) конкретного временного ряда наблюдения. Этот факт позволяет вынести суждение, что отношение сигнал/шум как параметр обнаружения в принципе носит фрактальный характер.

В практическом отношении было бы полезно и желательно определить влияние изменения и взаимозависимости, входящих в это выражение, параметров на степень изрезанности огибающей выходного сигнала приемника изображения, т. е. изменение его фрактальности. Проблема установления закономерностей и особенностей процесса оценки фрактальности и её вариаций от поведения отношения сигнала к шуму является академически интересной и самостоятельной областью исследования. Она требует детального изучения поведения системы при изменении форм и вариаций сигнала, наличия помех и вариаций их вида и статистического распределения.

Случай обнаружения малоконтрастных сигналов и изображений объекта соответствует классическому винеровскому процессу с траекторией хаотического броуновского движения [4, 5], являющегося примером самоаффинного фрактала. Это подтверждается тем, что координаты смещения изображения объекта в плоскости изображения, совмещенной с фоточувствительной поверхностью приемника изображения, и времени входят в соотношение подобия с различными коэффициентами. Фрактальную размерность самоаффинных фракталов характеризуют аффинным масштабным коэффициентом, называемым показателем Херста H ($0<H<1$).

Обобщая фрактальные методы анализа на случай обнаружения малоконтрастного изображения объекта, соответствующего достаточно малому отношению сигнал/шум, при котором нестационарность шума слабо проявляется или еще незаметна, формализованную модель – эффективной фрактальной размерности общепринятого понятия [1, 6] отношения сигнал/шум как фрактального параметра обнаружения малоконтрастных фрактальных сигналов и изображений можно записать в виде классической модели Херста:

$$\Psi_{FR} = (U_C N)^{H_э}, \quad (2)$$

где U_C и $H_э$ – параметры сигнала, подлежащие оценке по результатам измерений выборки объема N. Здесь введенный $H_э$ – показатель фрактальной размерности отношения сигнал/шум как параметра обнаружения, связанный с H – показателем

Херста, часто называемым аффинным показателем [5], простым соотношением

$$H_э = (1 + 2H)/2.$$

На практике различают два вида фрактальных размерностей: глобальную и при высоком разрешении – локальную. Считают [7, 8], что самоаффинные траектории с неоднозначной фрактальной размерностью не являются фрактальными в глобальном смысле. Для соотношения сигнал/шум как параметра обнаружения это подтверждается в выше приведенной формуле: в глобальном смысле отношение сигнал/шум представляет собой некоторую в ограниченном смысле постоянную величину (усредненную на принятом в практической системе интервале времени) и поэтому при классической процедуре обнаружения это отношение не является фрактальным параметром.

Таким образом, в настоящей работе предложена, как одна из возможных, модель фрактальности параметра обнаружения, определяемого фрактальной размерностью величины отношения сигнал/шум, сопоставимая с общепринятым понятием отношения сигнал/шум и формально основанная на классической модели Херста. Физическая сущность предложенной модели фрактальности отношения сигнал/шум как аналога модели Херста заключается в том, что введенный показатель $H_э$ характеризует степень хаотичности как случайной реализации выходного сигнала приемника изображения автоматического средства в целом. Показатель же H фрактальной размерности модели Херста отражает степень хаотичности только трендовой составляющей реализации выходного сигнала приемника. Это означает, что понятие фрактальности отношения сигнал/шум обобщает понятие фрактальной размерности на более широкий класс изображений и сигналов и позволяет оценить количественно эффективность обнаружения фрактальных изображений и сигналов общепринятым вероятностным подходом теории статистических решений.

Влияние дискретности элементов приемника изображения на формируемый им выходной сигнал от наблюдаемого системой объекта можно учесть зависимостью изменения среднего в строке или мгновенного в текущем отсчете выборки значения отношения сигнал/шум [9–12], которая справедлива и в условиях действия нестационарного шума:

$$\Psi_i(x, y, t) = \Psi_m(x, y, t) K(\delta),$$

где $K(\delta)$ – функциональная закономерность, описывающая изменение величины сигнала приемника изображения от наблюдаемого объекта.

Если применить к выражению (2) операцию логарифмирования, например, исходя из удобства дальнейшего сопоставления с известными физическими представлениями, то получим вероятностное уравнение, связывающее величину фрактальной размерности отношения сигнал/шум, точнее, значение его логарифма, как критерия оценки с параметрами сигнала, отражающими макроскопическое состояние ТАС. Таким же, «логарифмическим», подходом в [13] была выявлена граница заметного влияния нестационарности шума на изменение закономерности от линейного к нелинейному поведению отношения сигнал/шум при возрастании освещенности фоточувствительной поверхности приемника изображения.

Проведя нормировку и перейдя к относительным величинам, получим, что изменение отношения сигнал/шум, в общем случае, весьма наглядно описывается широко известной физикам функциональной зависимостью

$$S = k \ln w,$$

где S – логарифм фрактальной размерности отношения сигнал/шум; k – коэффициент пропорциональности, определяемый условием нормировки, и w – функция статистического веса данного равновесного состояния системы, определяемая значением энергии сигнала изображения и объемом его выборки.

Как видно, формализованное описание фрактальной размерности логарифма отношения сигнал/шум тождественно классическому определению (полученному [14] на основе формулировки второго начала термодинамики) энтропии – меры неупорядоченности системы, характеризующей вероятность получения конкретного значения фрактальной размерности отношения сигнал/шум при вышеуказанных параметрах сигнала, сформированного в текущем состоянии функционирования системой.

В данном случае, приведенную логарифмическую зависимость можно рассматривать как новое определение фрактальной размерности отношения сигнал/шум. Согласно этого выражения, фрактальная размерность представляет собой вероятностную величину, равную аддитивной статистической сумме числа всех возможных равновероятно распределенных составляющих процесса формирования сигнала изображения, в том числе, обусловленных разными источниками шума и воздействия внешних сосредоточенных помех.

Изменение фрактальной размерности, как и энтропии, обусловлено изменением параметров системы и условий ее функционирования. Наличие флуктуаций фрактальной размерности отношения сигнал/шум показывает, что, как и закон возрастания энтропии, поведение оценки фрактальной размерности выполняется только в среднем для достаточно большого промежутка времени.

Так же как и для энтропии, с уменьшением значения фрактальной размерности отношения сигнал/шум автоматическая система будет переходить из более вероятного статистически равновесного состояния в менее вероятное. Другими словами, изменению вероятного состояния системы свойственно изменение веса превалирующего действия

шума и помех на превалирующее действие сигнала изображения от объекта как полезного информационного сообщения.

Таким образом, по аналогии с формулировкой Л. Больцмана [14] о связи энтропии с вероятностью состояния системы: возрастание фрактальной размерности отношения сигнал/шум в ТАС обусловлено переходом системы из менее вероятного состояния в более вероятное. Иначе говоря, эволюция ТАС как замкнутой системы происходит в направлении наиболее вероятного статистически равновесного состояния её отдельных подсистем.

По аналогии с определением информационной энтропии как меры неопределенности сообщений (например, наличия сигнала от искомого объекта): фрактальная размерность отношения сигнал/шум будет принимать наибольшее значение, когда неопределенность в информации максимальна, т. е., равновероятно наличие сигнала от объекта и шума (помехи). В случае, когда неопределенность в информации отсутствует, вероятность наличия объекта тождественна единице (слежение и наведение объекта в системе устойчиво), фрактальная размерность отношения сигнал/шум будет иметь минимальное значение.

Выводы

1. Впервые введено понятие фрактальной размерности отношения сигнал/шум параметра обнаружения сигнала и объекта. На примере модели Херста показана возможность нахождения фрактальной размерности отношения сигнал/шум, функционально определяющего статистическое качество работы автоматических систем.
2. Установлена тождественность математического описания и закономерности поведения фрактальной размерности отношения сигнал/шум с энтропией. Показано, что фрактальная размерность отношения сигнал/шум, как и энтропия, обладает свойством аддитивности: фрактальная размерность отношения сигнал/шум для близко расположенных объектов с перекрытием изображений равна сумме таковых размерностей каждого из отдельных взятых сигналов.
3. Предложена модель оценки фрактальной размерности отношения сигнал/шум, выявлены общие закономерности ее изменения, что позволяет уточнить расчет и найти подходы к решению проблемы установления точных критериев оценки качества системы в режиме обнаружения фрактальных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лезин Ю.С. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. – М.: Советское радио, 1969. – 448 с.
2. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
3. Карпенко В.И., Даник Ю.Г., Маляров М.В. Обнаружение объектов во фрактальных структурах // Радиотехника. – 2002. – № 1. – С. 9–12.
4. Шустер Г. Детерминированный хаос: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 242 с.
5. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: РХД, 2001. – 528 с.
6. Михалков К.В. Основы телевизионной автоматики. – Л.: Энергия, 1970. – 284 с.
7. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. – М.: Мир, 1990. – 342 с.
8. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1993. – 176 с.
9. Слободян С.М. Разработка и исследование в режиме обнаружения устройств на диссекторе для контроля и управления оптическими пучками: Дис. ... канд. техн. наук. – Томск, 1978. – 191 с.
10. Слободян С.М. Статистически обусловленная пороговая чувствительность сканирующих средств оптического контроля // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 2. – С. 41–44.
11. Митяшев Б.Н. Определение временного положения импульсов при наличии помех. – М.: Советское радио, 1962. – 199 с.
12. Слободян С.М. Телевизионная диагностика лазерных пучков. – Барнаул: Азбука, 2006. – 224 с.
13. Слободян С.М. Влияние погрешности фокусировки на оценку фрактальной размерности // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 1. – С. 43–48.
14. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. – М.: Наука, 1971. – 194 с.